SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

Civil Services (Main) Examination- 2025

वियोज्य *DETACHABLE*

सांख्यिकी (प्रश्न-पत्र I)

STATISTICS (Paper I)

निर्धारित समय : तीन घंटे
Time Allowed : Three Hours

अधिकतम अंक : 250
Maximum Marks : 250

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें :

इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो **दो खण्डों** में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेज़ी** दोनों में छपे हैं ।

परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं ।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए । प्राधिकृत माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे ।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए ।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त है ।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो । प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए ।

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions :

There are **EIGHT** questions divided in **TWO SECTIONS** and printed both in **HINDI** and in **ENGLISH**.

Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, any **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer (QCA) Booklet must be clearly struck off.

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

खण्ड 'A' SECTION 'A'

1.(a) मान लीजिए E, F और G तीन युगलतः स्वतंत्र घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(E \cap F) = 0{\cdot}1$ और $P(F \cap G) = 0{\cdot}3$ है।

सिद्ध कीजिए कि $P(E^c \cup G) \geq \frac{11}{12}$ है।

Let E, F and G be three pairwise independent events such that $P(E \cap F) = 0{\cdot}1$ and $P(F \cap G) = 0{\cdot}3$.

Prove that $P(E^c \cup G) \geq \frac{11}{12}$. 10

1.(b) यदि X और Y ऋणेतर स्वतंत्र यादृच्छिक चर हैं तथा जिनका संयुक्त आघूर्ण जनक फलन

$M_{X,Y}(t_1, t_2) = e^{e^{t_1} + 2e^{t_2} - 3}$; $t_1 > 0$, $t_2 > 0$ है, तब दर्शाइये कि,

$2P(X + Y = 2) = 9P(X + Y = 0)$ है।

If X and Y are non-negative independent random variables and their joint moment generating function is given by

$M_{X,Y}(t_1, t_2) = e^{e^{t_1} + 2e^{t_2} - 3}$; $t_1 > 0$, $t_2 > 0$, then show that

$2P(X + Y = 2) = 9P(X + Y = 0)$. 10

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

1.(c) यदि X_1, X_2, ... स्वतंत्र और सर्वथा बंटित $U(0, 1)$ यादृच्छिक चरों का एक अनुक्रम है, तब

$\underset{n \to \infty}{Lim}\, P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n}{144}}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

[प्रयोग कीजिए, $\sqrt{3} = 1{\cdot}74$, $\Phi(0{\cdot}29) = 0{\cdot}6141$, $\Phi(1) = 0{\cdot}8413$]

If X_1, X_2, ... be a sequence of i.i.d. $U(0, 1)$ random variables, then find the value

of $\underset{n \to \infty}{Lim}\, P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n}{144}}\right)$

[use $\sqrt{3} = 1{\cdot}74$, $\Phi(0{\cdot}29) = 0{\cdot}6141$, $\Phi(1) = 0{\cdot}8413$] 10

1.(d) मान लीजिए कि $X_1, X_2, \ldots, X_n$ प्रसामान्य $N(\mu, \sigma^2)$ बंटन से लिया गया एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है। जब दोनों प्राचल अज्ञात हैं, तो प्राचलों (μ, σ^2) के लिए पर्याप्त प्रतिदर्शज निकालिए। यदि σ^2 ज्ञात है, तो प्राचल μ के लिए पर्याप्त प्रतिदर्शज क्या होगा ?

Let X_1, X_2, ..., X_n be a random sample from normal $N(\mu, \sigma^2)$ distribution. Obtain sufficient statistic for parameters (μ, σ^2) when both the parameters are unknown. If σ^2 is known, what will be sufficient statistic for parameter μ ? 10

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

1. (e) H_0 तथा H_1 के अंतर्गत एक यादृच्छिक चर X का बंटन निम्नलिखित है :

x	:	1	2	3	4	5	6
$f_0(x)$	:	0·01	0·01	0·01	0·01	0·01	0·95
$f_1(x)$	:	0·05	0·04	0·03	0·02	0·01	0·85

$H_0 : f = f_0$ विरुद्ध $H_1 : f = f_1$ का परीक्षण करने के लिए 0·03 आमाप वाला श्रेष्ठतम परीक्षण तथा उसकी द्वितीय प्रकार की त्रुटि की प्रायिकता प्राप्त कीजिए। क्या यह परीक्षण अनभिनत है ? क्यों ?

A random variable X has the following distribution under H_0 and H_1 :

x	:	1	2	3	4	5	6
$f_0(x)$	:	0·01	0·01	0·01	0·01	0·01	0·95
$f_1(x)$	:	0·05	0·04	0·03	0·02	0·01	0·85

Find the best test of size 0·03 and its probability of type-II error for testing $H_0 : f = f_0$ versus $H_1 : f = f_1$. Is it unbiased test ? Why ? 10

2. (a) मान लीजिए X एक संतत यादृच्छिक चर है जिसका प्रायिकता घनत्व फलन

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{25}(x+2), & -2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

है। $Y = X^2$ का संचयी बंटन फलन ज्ञात कीजिए और इस प्रकार Y का प्रायिकता घनत्व फलन प्राप्त कीजिए।

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

Let X be a continuous random variable having probability density function

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{25}(x+2), & -2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

Find the cumulative distribution function of $Y = X^2$ and hence find probability density function of Y. 20

2. (b) दो यादृच्छिक चरों (X, Y) का संयुक्त प्रायिकता द्रव्यमान फलन

$$P(X = x, Y = y) = \begin{cases} \binom{x+1}{y}\binom{16}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^y\left(\frac{5}{6}\right)^{x+1-y}\left(\frac{1}{2}\right)^{16}, & y = 0, 1, 2, \ldots, x+1; \\ & x = 0, 1, 2, \ldots, 16. \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

है। निम्नलिखित का मान निकालिए :

(i) $E(X)$, Var.(X)

(ii) $E(Y)$, Var.(Y)

(iii) Cov. (X, Y)

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

The joint probability mass function of two random variables (X, Y) be

$$P(X=x, Y=y)=\begin{cases}\binom{x+1}{y}\binom{16}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^{y}\left(\frac{5}{6}\right)^{x+1-y}\left(\frac{1}{2}\right)^{16}, & y=0, 1, 2, \ldots, x+1; \\ & x=0, 1, 2, \ldots, 16. \\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Evaluate the following :

(i) $E(X)$, Var.(X)

(ii) $E(Y)$, Var.(Y)

(iii) Cov. (X, Y) 5+5+5=15

2.(c) मान लीजिए कि (X, Y) का संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन निम्नवत् है :

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+y)}, & 0<x<y<\infty \\ 0, & \text{अन्यथा}\end{cases}$$

निम्नलिखित की गणना कीजिए :

(i) $P(Y<1)$

(ii) $P(\lambda X<Y)$, $\lambda>1$

(iii) $P(Y>3X \mid Y>2X)$

Let the joint probability density function of (X, Y) be

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+y)}, & 0<x<y<\infty \\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

Compute the following :

(i) $P(Y<1)$

(ii) $P(\lambda X<Y)$, $\lambda>1$

(iii) $P(Y>3X \mid Y>2X)$ 5+5+5=15

3.(a) मान लीजिए एक अभिनत सिक्के में चित आने की प्रायिकता $\frac{4}{5}$ है, और X सिक्के की 25 स्वतंत्र उछालों में प्राप्त चितों की संख्या को दर्शाता है। उसी सिक्के को पुन: X बार स्वतंत्र रूपसे उछालने पर हमें Y चित प्राप्त होते हैं। Var.$(X+25Y)$ की गणना कीजिए।

Let probability of obtaining Head on a biased coin be $\frac{4}{5}$ and X be the number of heads obtained in a sequence of 25 independent tosses of the coin. The same coin is tossed again X number of times independently and we obtain Y heads. Compute Var.$(X+25Y)$. 20

3.(b)(i) मान लीजिए $\{6, -8, 3, 2, 7, 5, 4, 9\}$, प्रायिकता घनत्व फलन $f(x, \theta) = \frac{1}{2}\exp(-|x-\theta|)$, $-\infty<x, \theta<\infty$ वाली एक समष्टि से लिया गया एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है। θ का अधिकतम संभाविता आकलक प्राप्त कीजिए।

SPM IAS ACADEMY SHAPING BRILLIANCE

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

Let {6, –8, 3, 2, 7, 5, 4, 9} be a random sample from a population with probability density function $f(x, \theta) = \frac{1}{2} \exp(-|x-\theta|)$, $-\infty < x, \theta < \infty$. Obtain maximum likelihood estimate of θ. 5

3. (b)(ii) मान लीजिए $X_1, X_2, ..., X_n$ बर्नूली-बंटन $b(1, \theta)$, $0<\theta<1$ से लिया गया एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है। इन आँकडों पर आधारित, θ के एक अनभिनत आकलक के प्रसरण के लिए निम्न परिबन्ध ज्ञात कीजिए। θ का एक समान न्यूनतम प्रसरण अनभिनत आकलक ज्ञात कीजिए तथा दर्शाइए कि यह क्रामर-राव निम्न परिबन्ध प्राप्त करता है।

Let $X_1, X_2, ..., X_n$ be a random sample from Bernoulli distribution $b(1, \theta)$, $0<\theta<1$. Find the lower bound for the variance of an unbiased estimator of θ based on this data. Find uniformly minimum variance unbiased estimator of θ and show that it attains Cramer-Rao lower bound. 10

3. (c) मान लीजिए $X_1, X_2, ..., X_n$ प्रथम प्रकार के बीटा बंटन $\beta_{(1, \theta)}$, $\theta>0$ से लिया गया एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है। θ का संगत आकलक ज्ञात कीजिए और इसका प्रसरण भी निकालिए।

Let $X_1, X_2, ..., X_n$ be a random sample from beta distribution of first kind $\beta_{(1, \theta)}$, $\theta>0$. Find consistent estimator of θ, and its variance also. 15

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

4. (a) मान लीजिए $X_1, X_2, ...$ माध्य θ, $0<\theta<1$ वाले बर्नूली-बंटन से लिए गए यादृच्छिक चरों का एक अनुक्रम है। $H_0 : \theta = \theta_0$ विरुद्ध $H_1 : \theta = \theta_1 = 1 - \theta_0$, $0<\theta_0<1$, के परीक्षण के लिए SPRT व्युत्पन्न कीजिए। इस परीक्षण के OC फलन तथा ASN फलन के व्यंजकों को भी प्राप्त कीजिए।

Let $X_1, X_2, ...$ be a sequence of random variables from Bernoulli distribution with mean θ, $0<\theta<1$. Derive SPRT for testing $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta = \theta_1 = 1 - \theta_0$, $0<\theta_0<1$. Also obtain expressions for OC function and ASN function. 20

4. (b) माध्य $\theta>0$ वाले चरघातांकी बंटन से आमाप n का एक यादृच्छिक प्रतिदर्श लिया गया है। दिया गया है कि, n प्रेक्षणों में से n_1 प्रेक्षण 'a' से छोटे हैं। दर्शाइए कि θ का न्यूनतम काई-वर्ग आकलक तथा अधिकतम संभाविता आकलक समान हैं।

A random sample of size n is taken from the exponential distribution with mean $\theta>0$. Given that n_1 observations out of n observations are less than 'a'. Show that minimum Chi-square estimate and maximum likelihood estimate of θ are same. 15

4. (c) ब्रांड-A की 6 वस्तुओं और ब्रांड-B की 6 वस्तुओं के जीवनकाल नीचे दिये गये हैं :

A	:	40	62	55	35	48	88
B	:	50	70	65	30	45	92

कोलमोगोरोव-स्मिरनॉव परीक्षण का उपयोग करते हुए, 5% सार्थकता स्तर पर परीक्षण कीजिए कि दोनों ब्रांड का जीवन का बंटन समान है या नहीं।

[दिया गया है कि $D_{(6,\ 6,\ 0\cdot05)} = 2/3$]

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

The life of 6 items of brand-A and 6 items of brand-B are given below :

A	:	40	62	55	35	48	88
B	:	50	70	65	30	45	92

Using Kolmogorov-Smirnov test, test whether the distribution of life of both the brands are same or not at 5% level of significance.
[Given that $D_{(6,\ 6,\ 0\cdot05)} = 2/3$] 15

खण्ड 'B' SECTION 'B'

5. (a) द्विचर रैखिक समाश्रयण निदर्श $Y_i = a + bX_i + e_i$ जहाँ $E(e_i) = 0$, $\text{Var}(e_i) = \sigma_e^2$, $\text{Cov}(e_i, e_j) = 0, i \neq j, (i, j) \in \{1, 2, ..., n\}$, के लिए यदि $\hat{a}$ और $\hat{b}$ क्रमशः a और b के न्यूनतम वर्ग आकलक हैं, तो $\text{Var}(\hat{a})$, $\text{Var}(\hat{b})$ तथा $\text{Cov}(\hat{a}, \hat{b})$ के लिए व्यंजकों को व्युत्पन्न कीजिए।

For a two variable linear regression model $Y_i = a + bX_i + e_i$, where $E(e_i) = 0$, $\text{Var}(e_i) = \sigma_e^2$, $\text{Cov}(e_i, e_j) = 0$ for $i \neq j$, $(i, j) \in \{1, 2, ..., n\}$, if $\hat{a}$ and $\hat{b}$ are least square estimators of a and b respectively, derive expressions for $\text{Var}(\hat{a})$, $\text{Var}(\hat{b})$ and $\text{Cov}(\hat{a}, \hat{b})$. 10

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

5. (b) मान लीजिए $X = (X_1\ X_2\ X_3)' \sim N_3(\mu, \Sigma)$,
जहाँ

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ तथा } \Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ है।}$$

$Y_1 = X_1 + X_2 + X_3$ और $Y_2 = X_2 - X_3$ का संयुक्त बंटन ज्ञात कीजिए।

Let $X = (X_1\ X_2\ X_3)' \sim N_3(\mu, \Sigma)$,

where

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ and } \Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Find the joint distribution of $Y_1 = X_1 + X_2 + X_3$ and $Y_2 = X_2 - X_3$. 10

5. (c) यदि $X_1, X_2, ..., X_n$ एक मानक प्रसामान्य समष्टि से लिया गया एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है, तो द्विघात रूपों का उपयोग करके दर्शाइए कि प्रतिदर्श माध्य $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ और प्रतिदर्श प्रसरण

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X})^2$$ प्रसंभाव्य रूप से स्वतंत्र हैं।

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

If $X_1, X_2, ..., X_n$ is a random sample from a standard normal population, then using quadratic forms show that the sample mean $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ and sample variance $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2$ are stochastically independent. 10

5. (d) मान लें कि वस्तुओं की बहुत बड़ी संख्या वाली समष्टि में दोष पूर्ण वस्तुओं का अनुपात 0·30 है। इस समष्टि से एक सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श निकाले जाने पर प्रतिदर्श का आमाप क्या होना चाहिए ताकि 95·5 प्रतिशत प्रायिकता के साथ वास्तविक मान के 2% के भीतर दोष प्रतिशत का आकलन किया जा सके ?

[दिया गया है $P(0 \leq Z \leq 1{\cdot}96) = 0{\cdot}475$; तथा $P(0 \leq Z \leq 2{\cdot}005) = 0{\cdot}4775$].

Assume that in a population of very large number of items, proportion of defective items is 0·30. What should be the size of the sample, if a simple random sample is to be drawn from this population to estimate the percent defective within 2 percent of the true value with 95·5 percent probability ?

[Given $P(0 \leq Z \leq 1{\cdot}96) = 0{\cdot}475$; and $P(0 \leq Z \leq 2{\cdot}005) = 0{\cdot}4775$]. 10

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

5. (e) भूखंडों और खण्डकों के आमाप और आकार खेत प्रयोगों के परिणामों को कैसे प्रभावित करते हैं ?

How do the size and shape of plots and blocks effect the results of field experiments ? 10

6. (a)(i) यदि (X, Y) द्विचर प्रसामान्य $BN(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ का अनुसरण करता है, तो

(A) $E(e^X)$

(B) $E(e^{X+Y})$

(C) $\text{Var}(e^X)$ तथा

(D) e^X और e^Y के बीच सहसंबंध ज्ञात कीजिए।

If (X, Y) follows bivariate normal $BN(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, then obtain

(A) $E(e^X)$

(B) $E(e^{X+Y})$

(C) $\text{Var}(e^X)$ and

(D) Correlation between e^X and e^Y. 3+3+3+3=12

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

6. (a)(ii) यदि (X, Y) का संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन निम्नवत् है :

$$g(x,y) = \begin{cases} y\ e^{-y(x+1)}, & x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0 & ,\ \text{अन्यथा}, \end{cases}$$

तो X का Y पर समाश्रयण वक्र ज्ञात कीजिए तथा वक्र की प्रकृति पर टिप्पणी कीजिए।

If (X, Y) have the joint probability density function

$$g(x,y) = \begin{cases} y\ e^{-y(x+1)}, & x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0 & ,\ \text{elsewhere}, \end{cases}$$

then find the regression curve of X on Y and comment on the nature of the curve. 8

6. (b) मान लीजिए कि $X = (X_1, X_2, X_3)' \sim N_3(\mu, \Sigma)$, जिसमें

$$\mu = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ तथा } \Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

है। ज्ञात कीजिए

(i) $E\{X_1 \mid X_2 = x_2, X_3 = x_3\}$ और

(ii) $\text{Var}\{X_1 \mid X_2 = x_2, X_3 = x_3\}$.

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

Let $X = (X_1, X_2, X_3)' \sim N_3(\mu, \Sigma)$,
in which

$$\mu = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ and } \Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Obtain

(i) $E\{X_1 \mid X_2 = x_2, X_3 = x_3\}$ and

(ii) $\text{Var}\{X_1 \mid X_2 = x_2, X_3 = x_3\}$. 15

6. (c) निदर्श पर विचार कीजिए :

$$\underset{n\times 1}{Y} = \underset{n\times k}{X}\ \underset{k\times 1}{\theta} + \underset{n\times 1}{\varepsilon},$$

जहाँ ε अलक्ष्य यादृच्छिक चरों का एक $n\times 1$ सदिश इस प्रकार है कि $E(\varepsilon) = 0$ और $D(\varepsilon) = \sigma^2\Omega$, $\sigma > 0$ अज्ञात है, Ω ज्ञात स्थिरांकों का एक धनात्मक निश्चित आव्यूह है तथा कोटि $(X) = k < n$ है। तब :

(i) θ का न्यूनतम वर्ग आकलक व्युत्पन्न कीजिए और

(ii) σ^2 का एक अनभिनत आकलक व्युत्पन्न कीजिए।

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

Consider the model :

$$\underset{n\times 1}{Y} = \underset{n\times k}{X}\ \underset{k\times 1}{\theta} + \underset{n\times 1}{\varepsilon},$$

where ε is an $n\times1$ vector of unobservable random variables such that $E(\varepsilon) = 0$ and $D(\varepsilon) = \sigma^2\Omega$, $\sigma>0$ unknown, Ω is a positive definite matrix of known constants and $\text{rank}(X) = k<n$. Then

(i) Derive least square estimator of θ and

(ii) Derive an unbiased estimator of σ^2 9+6=15

7.(a) गेंहू की चार किस्मों A, B, C और D के परीक्षण के लिए किये गए प्रयोग के परिणाम स्वरूप प्रति खेत गेंहू के उत्पादन से संबंधित निम्नलिखित आकड़ों का विश्लेषण और व्याख्या कीजिए, जो 5% सार्थकता स्तर पर एक लैटिन वर्ग अभिकल्पना के अंतर्गत किया गया हो।
[दिया गया है $F(3, 6) = 4{\cdot}76$; $F(4, 7) = 4{\cdot}12$]

C 35	B 33	A 30	D 30
A 29	D 29	C 31	B 28
B 29	A 24	D 27	C 30
D 27	C 30	B 31	A 25

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

Analyse and interpret the following data concerning output of wheat per field obtained as a result of experiment conducted to test four varieties of wheat A, B, C and D under a Latin square design at 5% level of significance.
[Given $F(3, 6) = 4{\cdot}76$; $F(4, 7) = 4{\cdot}12$]

C 35	B 33	A 30	D 30
A 29	D 29	C 31	B 28
B 29	A 24	D 27	C 30
D 27	C 30	B 31	A 25

20

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

7. (b)(i) बहु-उपादानी प्रयोगों की आवश्यकता की, एक औषध अध्ययन के उदाहरण के साथ, व्याख्या कीजिए।

Explain the need of factorial experiments with an example from pharmaceutical study.

7. (b)(ii) 2^4 बहु-उपादानी प्रयोग के 16 उपचारों को 4 समूहों में, प्रत्येक में 4 उपचारों के साथ, विभाजित कीजिए, जिसमें अन्योन्य क्रिया प्रभाव *AB* और *CD* को समूहों के साथ पूरी तरह से संकरण किया गया है। इस अभिकल्पना में कौन सी अन्य अन्योन्य क्रिया स्वचालित रूप से संकरित होती है ?

Divide the 16 treatments of 2^4 factorial experiment into 4 blocks of 4 treatments each, confounding the interaction effect *AB* and *CD* completely with blocks. Which other interaction is automatically confounded in this design ? 6+9=15

7. (c) हॉरविट्ज-थाम्पसन आकलक को समष्टि योग का आकलन करने के लिए परिभाषित कीजिए, और दर्शाइए कि यह आकार के समानुपात प्रायिकता वाले प्रतिचयन, प्रतिस्थापन रहित, के लिए अनभिनत है। इस का प्रतिचयन प्रसरण भी ज्ञात कीजिए।

Define Horvitz-Thompson estimator for estimating the population total, and show that it is unbiased for probability proportional to size sampling without replacement. Also find its sampling variance. 15

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

8. (a)(i) मुख्य घटक क्या हैं ? दर्शाइए कि मुख्य घटक असहसम्बंधित हैं।

What are principal components ? Show that the principal components are uncorrelated.

8. (a)(ii) निम्नलिखित प्रकीर्णन आव्यूह से संबंधित मुख्य घटकों को प्राप्त कीजिए तथा प्रत्येक मुख्य घटक द्वारा स्पष्ट की गई परिवर्तन की मात्रा प्राप्त कीजिए :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

परिणामों पर टिप्पणी कीजिए।

Obtain the principal components and the amount of variation explained by each principal component associated with the following dispersion matrix :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Comment on the results. 20

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

8. (b) दिए गए आँकड़ों के लिए, दूसरे खंड में उपचार *B* की उपज लुप्त है और इसे '*y*' से दर्शाया गया है। लुप्त मान का आकलन कीजिए, और आँकड़ों का सार्थकता स्तर 0·05 पर विश्लेषण कीजिए।

		खंड		
		I	II	III
उपचार	*A*	22	24	22
	B	20	*y*	18
	C	21	25	20

[दिया गया है $F(3, 4) = 6{\cdot}59$; और $F(2, 3) = 9{\cdot}55$]

For the given data, the yield of the treatment *B* in the second block is missing and is denoted as '*y*'. Estimate the missing value, and analyse the data by assuming the level of significance = 0·05.

		Block		
		I	II	III
Treatments	*A*	22	24	22
	B	20	*y*	18
	C	21	25	20

[Given that $F(3, 4) = 6{\cdot}59$; and $F(2, 3) = 9{\cdot}55$] 20

8. (c) प्रतिचयन और अप्रतिचयन त्रुटियों के बीच अंतर कीजिए। उनके स्रोत क्या हैं ? इन त्रुटियों को कैसे नियंत्रित किया जा सकता है ?

Distinguish between Sampling and Non-sampling Errors. What are their sources ? How these errors can be controlled ? 10

SPM IAS ACADEMY SHAPING BRILLIANCE

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE