SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

CS (Main) Exam, 2021

वियोज्य DETACHABLE

गणित (प्रश्न-पत्र I)

MATHEMATICS (Paper I)

निर्धारित समय : तीन घण्टे	*अधिकतम अंक : 250*
Time Allowed : Three Hours	*Maximum Marks : 250*

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

उत्तर देने के पूर्व निम्नलिखित निर्देशों को कृपया सावधानीपूर्वक पढ़ें ।

इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो **दो खण्डों** में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेज़ी** दोनों में छपे हुए हैं ।

उम्मीदवार को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के लिए नियत अंक उसके सामने दिए गए हैं ।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए । प्राधिकृत माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे ।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए ।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं ।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो । प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए ।

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions.

There are **EIGHT** questions divided in **TWO SECTIONS** and printed both in **HINDI** and in **ENGLISH**.

Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** question from each section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

खण्ड 'A'   SECTION 'A'

1.(a) यदि $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ है,

तो A^{-1} को ज्ञात किए बिना दर्शाइए कि $A^2 = A^{-1}$

If $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$, then show that

$A^2 = A^{-1}$ (without finding A^{-1}). 10

1.(b) क्रमित आधारक $B = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ के सापेक्ष $V_3(R)$ पर परिभाषित रैखिक संकारक : $T(a, b, c) = (a + b,\ a - b,\ 2c)$ से संबन्धित आव्यूह ज्ञात कीजिए ।

Find the matrix associated with the linear operator on $V_3(R)$ defined by $T(a, b, c) = (a + b,\ a - b,\ 2c)$ with respect to the ordered basis $B = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$. 10

1.(c) दिया गया है :

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix} f(x+\alpha) & f(x+2\alpha) & f(x+3\alpha)\\ f(\alpha) & f(2\alpha) & f(3\alpha)\\ f'(\alpha) & f'(2\alpha) & f'(3\alpha)\end{vmatrix}$$

जहाँ f एक वास्तविक-मान अवकलनीय फलन है तथा α एक अचर है ।

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\Delta(x)}{x}$ को ज्ञात कीजिए ।

Given :

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix} f(x+\alpha) & f(x+2\alpha) & f(x+3\alpha)\\ f(\alpha) & f(2\alpha) & f(3\alpha)\\ f'(\alpha) & f'(2\alpha) & f'(3\alpha)\end{vmatrix}$$

where f is a real valued differentiable function and α is a constant.

Find $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\Delta(x)}{x}$. 10

1.(d) दर्शाइए कि $e^x \cos x = 1$ के किन्हीं दो मूलों के बीच में $e^x \sin x - 1 = 0$ का कम से कम एक मूल विद्यमान है ।

Show that between any two roots of $e^x \cos x = 1$, there exists at least one root of $e^x \sin x - 1 = 0$. 10

1.(e) उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके जनक, रेखा :

$$x = -\frac{y}{2} = \frac{z}{3} \text{ के समानान्तर हैं}$$

तथा जिसका निर्देशक-वक्र $x^2 + 2y^2 = 1,\ z = 0$ है ।

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to the line $x = -\frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ and whose guiding curve is $x^2 + 2y^2 = 1,\ z = 0$. 10

2.(a) दर्शाइए कि वे समतल, जो कि शंकु $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ को लंब जनकों में काटते हैं, शंकु $\frac{x^2}{b+c} + \frac{y^2}{c+a} + \frac{z^2}{a+b} = 0$ को स्पर्श करते हैं।

Show that the planes, which cut the cone $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ in perpendicular generators, touch the cone $\frac{x^2}{b+c} + \frac{y^2}{c+a} + \frac{z^2}{a+b} = 0$. 20

2.(b) दिया गया है : $f(x, y) = |x^2 - y^2|$, तब $f_{xy}(0, 0)$ तथा $f_{yx}(0, 0)$ ज्ञात कीजिए। अतः दर्शाइए कि $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$ ।

Given that $f(x, y) = |x^2 - y^2|$. Find $f_{xy}(0, 0)$ and $f_{yx}(0, 0)$.
Hence show that $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$. 15

2.(c) दर्शाइए कि $S = \{(x, 2y, 3x) : x, y$ वास्तविक संख्याऐं हैं$\}$ $R^3(R)$ का एक उपसमष्टि है। S के दो आधार ज्ञात कीजिए। S की विमा भी ज्ञात कीजिए।

Show that $S = \{(x, 2y, 3x) : x, y$ are real numbers$\}$ is a subspace of $R^3(R)$. Find two bases of S. Also find the dimension of S. 15

3.(a)(i) यदि $u = x^2 + y^2,\ v = x^2 - y^2$, जहाँ पर $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ हैं, तब $\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \theta)}$ ज्ञात कीजिए।

If $u = x^2 + y^2,\ v = x^2 - y^2$, where $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, then find $\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \theta)}$. 7

3.(a)(ii) यदि $\int_0^x f(t)\,dt = x + \int_x^1 t f(t)\,dt$ है, तो $f(1)$ का मान ज्ञात कीजिए।

If $\int_0^x f(t)\,dt = x + \int_x^1 t f(t)\,dt$, then find the value of $f(1)$. 5

3.(a)(iii) $\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n\,dx$ को बीटा-फलन के रूप में व्यक्त कीजिए।

Express $\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n\,dx$ in terms of Beta function. 8

3.(b) अचर त्रिज्या r का एक गोला मूल-बिंदु O से गुजरता है तथा अक्षों को A, B, C बिन्दुओं पर काटता है। O से समतल ABC पर खींचे गए लंब-पाद का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

A sphere of constant radius r passes through the origin O and cuts the axes at the points A, B and C. Find, the locus of the foot of the perpendicular drawn from O to the plane ABC. 15

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

3.(c)(i) सिद्ध कीजिए कि एक वास्तविक सममित आव्यूह के दो भिन्न अभिलक्षणिक मानों के संगत अभिलक्षणिक सदिश, लांबिक हैं।

Prove that the eigen vectors, corresponding to two distinct eigen values of a real symmetric matrix, are orthogonal. 8

3.(c)(ii) दो वर्ग आव्यूह A तथा B जिनकी कोटि, 2 है के लिए दर्शाइए कि अनुरेख (AB) = अनुरेख (BA)। अतैव दर्शाइए कि $AB - BA \neq I_2$ जहाँ I_2 एक 2-कोटि का तत्समक आव्यूह है।

For two square matrices A and B of order 2, show that trace (AB) = trace (BA). Hence show that $AB - BA \neq I_2$, where I_2 is an identity matrix of order 2. 7

4.(a)(i) निम्नलिखित आव्यूह का पंक्ति-समानीत सोपानक रूप में समानयन कीजिए एवं अतैव इसकी कोटि भी ज्ञात कीजिए।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

Reduce the following matrix to a row-reduced echelon form and hence also, find its rank :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

10

4.(a)(ii) सम्मिश्र संख्या क्षेत्र पर आव्यूह $A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ के अभिलक्षणिक मान तथा संगत अभिलक्षणिक सदिशों को ज्ञात कीजिए।

Find the eigen values and the corresponding eigen vectors of the matrix

$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, over the complex-number field. 10

4.(b) दर्शाइए कि ऐस्ट्रॉइड : $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ का पूरा क्षेत्रफल $\frac{3}{8}\pi a^2$ है।

Show that the entire area of the Astroid : $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ is $\frac{3}{8}\pi a^2$. 15

4.(c) रेखाओं

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+5}{7},$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{5}$$

को अंतर्विष्ट करने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए। दी गई रेखाओं के प्रतिच्छेद बिंदु को भी ज्ञात कीजिए।

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

Find equation of the plane containing the lines

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+5}{7},$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{5}.$$

Also find the point of intersection of the given lines. 15

खण्ड 'B' SECTION 'B'

5.(a) अवकल समीकरण :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2y = x^2 e^{3x} + e^x \cos 2x$$

को हल कीजिए।

Solve the differential equation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2y = x^2 e^{3x} + e^x \cos 2x$$

10

5.(b) लाप्लास रूपान्तर विधि का उपयोग करते हुए प्रारम्भिक मान समस्या :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = e^{-2x} \sin 2x;\ y(0) = y'(0) = 0$$

को हल कीजिए।

Solve the initial value problem :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = e^{-2x} \sin 2x;\ y(0) = y'(0) = 0$$

using Laplace transform method. 10

5.(c) दो छड़े LM व MN बिन्दु M पर दृढ़ता से इस प्रकार जुड़ी हैं कि $(LM)^2 + (MN)^2 = (LN)^2$ तथा वे स्वतन्त्र रूप से साम्यावस्था में स्थिर बिन्दु L पर टँगी हैं। माना कि दोनों एकसमान छड़ों का प्रति एकांक लम्बाई, भार ω है। छड़ LM का ऊर्ध्वाधर दिशा के साथ बने कोण को छड़ों की लम्बाई के रूप में ज्ञात कीजिए।

Two rods LM and MN are joined rigidly at the point M such that $(LM)^2 + (MN)^2 = (LN)^2$ and they are hanged freely in equilibrium from a fixed point L. Let ω be the weight per unit length of both the rods which are uniform. Determine the angle, which the rod LM makes with the vertical direction, in terms of lengths of the rods. 10

5.(d) यदि एक ग्रह, जो सूर्य के परितः वृत्तीय कक्षा में परिभ्रमण करता है, अचानक अपनी कक्षा में रोक दिया जाता है, तो वह समय, जिसमें वह सूर्य में गिर जाएगा, ज्ञात कीजिए। इसके गिरने के समय का ग्रह के परिभ्रमण आवर्तकाल से अनुपात भी ज्ञात कीजिए।

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

If a planet, which revolves around the Sun in a circular orbit, is suddenly stopped in its orbit, then find the time in which it would fall into the Sun. Also, find the ratio of its falling time to the period of revolution of the planet. 10

5.(e) दर्शाइए कि $\nabla^2\left[\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)\right] = \frac{2}{r^4}$, जहाँ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ है।

Show that $\nabla^2\left[\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)\right] = \frac{2}{r^4}$, where $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. 10

6.(a) एक भारी डोरी, जिसका घनत्व एक समान नहीं है, दो बिन्दुओं से टँगी हुई है। माना कि T_1, T_2, T_3 क्रमशः कैटिनरी के बीच के बिन्दुओं A, B, C पर तनाव हैं, जिन पर इसके क्षैतिज के साथ आनति कोण, सार्व अंतर β के साथ समांतर श्रेढ़ी में हैं। माना कि डोरी के AB तथा BC भागों के भार क्रमशः ω_1 तथा ω_2 हैं। सिद्ध कीजिए

(i) T_1, T_2 तथा T_3 का हरात्मक माध्य $= \dfrac{3T_2}{1+2\cos\beta}$

(ii) $\dfrac{T_1}{T_3} = \dfrac{\omega_1}{\omega_2}$

A heavy string, which is not of uniform density, is hung up from two points. Let T_1, T_2, T_3 be the tensions at the intermediate points A, B, C of the catenary respectively where its inclinations to the horizontal are in arithmetic progression with common difference β. Let ω_1 and ω_2 be the weights of the parts AB and BC of the string respectively. Prove that

(i) Harmonic mean of T_1, T_2 and $T_3 = \dfrac{3T_2}{1+2\cos\beta}$

(ii) $\dfrac{T_1}{T_3} = \dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ 20

6.(b) सभी अन्तर्ग्रस्त (शामिल) चरणों को दर्शाते हुए समीकरण :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (\tan x - 3\cos x)\frac{dy}{dx} + 2y\cos^2 x = \cos^4 x$$

को पूर्ण रूप से हल कीजिए।

Solve the equation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (\tan x - 3\cos x)\frac{dy}{dx} + 2y\cos^2 x = \cos^4 x$$

completely by demonstrating all the steps involved. 15

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

6.(c) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ का मान निकालिए,

जहाँ C, xy-समतल में एक स्वैच्छिक संवृत वक्र है तथा $\vec{F} = \frac{-y\hat{i} + x\hat{j}}{x^2 + y^2}$ है।

Evaluate $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, where C is an arbitrary closed curve in the xy-plane and

$\vec{F} = \frac{-y\hat{i} + x\hat{j}}{x^2 + y^2}$. 15

7.(a) प्रथम अष्टांशक में $y^2 + z^2 = 9$ तथा $x = 2$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र पर $\vec{F} = 2x^2y\hat{i} - y^2\hat{j} + 4xz^2\hat{k}$ के लिए गाउस अपसरण प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

Verify Gauss divergence theorem for $\vec{F} = 2x^2y\hat{i} - y^2\hat{j} + 4xz^2\hat{k}$ taken over the region in the first octant bounded by $y^2 + z^2 = 9$ and $x = 2$. 20

7.(b) अवकल समीकरण :

$$y^2 \log y = xy\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

के सभी सम्भव हल ज्ञात कीजिए।

Find all possible solutions of the differential equation :

$$y^2 \log y = xy\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$ 15

7.(c) एक भारी कण a लम्बाई की अवितान्य डोरी से एक स्थिर बिन्दु से टँगा है तथा $\sqrt{2gh}$ वेग से क्षैतिज दिशा में प्रक्षेपित किया जाता है। यदि $\frac{5a}{2} > h > a$ है, तो सिद्ध कीजिए कि प्रक्षेपण बिन्दु से $\frac{1}{3}(a + 2h)$ ऊँचाई पहुँचने पर कण की वृत्तीय गति समाप्त हो जाती है। यह भी सिद्ध कीजिए कि उस कण द्वारा प्रक्षेपण बिंदु से ऊपर प्राप्य अधिकतम ऊँचाई $\frac{(4a - h)(a + 2h)^2}{27a^2}$ है।

A heavy particle hangs by an inextensible string of length a from a fixed point and is then projected horizontally with a velocity $\sqrt{2gh}$. If $\frac{5a}{2} > h > a$, then prove that the circular motion ceases when the particle has reached the height $\frac{1}{3}(a + 2h)$ from the point of projection. Also, prove that the greatest height ever reached by the particle above the point of projection is $\frac{(4a - h)(a + 2h)^2}{27a^2}$. 15

8.(a)(i) संनाभि शांकव कुल

$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1$; $a > b > 0$ अचर हैं तथा λ एक प्राचल है,

के लंबकोणीय संछेदी ज्ञात कीजिए। दर्शाइए कि दिया गया वक्र-कुल स्वलांबिक है।

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

Find the orthogonal trajectories of the family of confocal conics

$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1$; $a>b>0$ are constants and λ is a parameter.

Show that the given family of curves is self orthogonal. 10

8.(a)(ii) अवकल समीकरण : $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x(1+x)\frac{dy}{dx}+2(1+x)y=0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए ।

अत: अवकल समीकरण : $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x(1+x)\frac{dy}{dx}+2(1+x)y=x^3$ को प्राचल विचरण विधि द्वारा हल कीजिए ।

Find the general solution of the differential equation :

$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x(1+x)\frac{dy}{dx}+2(1+x)y=0.$

Hence, solve the differential equation : $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x(1+x)\frac{dy}{dx}+2(1+x)y=x^3$

by the method of variation of parameters. 10

8.(b) द्रव्यमान m का एक कण, जो की प्रक्षेपण बिन्दु से वेग u के साथ क्षैतिज दिशा के साथ θ कोण बनाने वाली दिशा में प्रक्षेपण बिन्दु से गुजरने वाले ऊर्ध्वाधर समतल में प्रक्षेपित किया जाता है, उसकी गति तथा पथ का वर्णन कीजिए । यदि कणों को उसी बिन्दु से उसी ऊर्ध्वाधर समतल में वेग $4\sqrt{g}$ के साथ प्रक्षेपित किया जाता है, तो उनके पथों के शीर्षों के बिन्दुपथ को भी निर्धारित कीजिए ।

Describe the motion and path of a particle of mass m which is projected in a vertical plane through a point of projection with velocity u in a direction making an angle θ with the horizontal direction. Further, if particles are projected from that point in the same vertical plane with velocity $4\sqrt{g}$, then determine the locus of vertices of their paths. 15

8.(c) स्टोक्स प्रमेय का उपयोग करते हुए $\iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\hat{n}dS$ का मान निकालिए, जहाँ पर $\vec{F}=(x^2+y-4)\hat{i}+3xy\hat{j}+(2xy+z^2)\hat{k}$ तथा S, परवलयज $z=4-(x^2+y^2)$ का xy-समतल से ऊपर का पृष्ठ है । यहाँ $\hat{n}$, S पर एकक बहिर्मुखी अभिलंब सदिश है ।

Using Stokes' theorem, evaluate $\iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\hat{n}dS$,

where $\vec{F}=(x^2+y-4)\hat{i}+3xy\hat{j}+(2xy+z^2)\hat{k}$ and S is the surface of the paraboloid $z=4-(x^2+y^2)$ above the xy-plane. Here, $\hat{n}$ is the unit outward normal vector on S. 15