SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

CIVIL SERVICES (MAIN) EXAM-2022

CRNA-F-MTH

गणित / MATHEMATICS

प्रश्न-पत्र I / Paper I

*निर्धारित समय : **तीन घंटे***	*अधिकतम अंक : **250***
*Time Allowed : **Three Hours***	*Maximum Marks : **250***

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें :

*इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो **दो खण्डों** में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेज़ी** दोनों में छपे हुए हैं ।*

*परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।*

*प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।*

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं ।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए । प्राधिकृत माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे ।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए ।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं ।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो । प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए ।

Question Paper Specific Instructions

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions :

*There are **EIGHT** questions divided in **TWO SECTIONS** and printed both in **HINDI** and in **ENGLISH**.*

*Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.*

*Questions no. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, any **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** question from each section.*

The number of marks carried by a question / part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer (QCA) Booklet must be clearly struck off.

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

खण्ड A

SECTION A

Q1. (a) सिद्ध कीजिए कि n विमीय सदिश समष्टि V के लिए n रैखिकत: स्वतंत्र सदिशों का कोई भी समुच्चय V के लिए एक आधार बनाता है ।

Prove that any set of n linearly independent vectors in a vector space V of dimension n constitutes a basis for V. *10*

(b) माना $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ एक रैखिक रूपांतरण, ऐसा है कि $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ तथा $T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\\8\end{pmatrix}$ है । $T\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ को ज्ञात कीजिए ।

Let $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ be a linear transformation such that $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ and $T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\\8\end{pmatrix}$. Find $T\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$. *10*

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$ का मान निकालिए ।

Evaluate $\lim\limits_{x \to \infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$. *10*

(d) $\int_0^2 \frac{dx}{(2x - x^2)}$ की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए ।

Examine the convergence of $\int_0^2 \frac{dx}{(2x - x^2)}$. *10*

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

(e) एक चर समतल एक स्थिर बिन्दु (a, b, c) से गुज़रता है तथा अक्षों को क्रमश: A, B व C बिन्दुओं पर मिलता है । बिन्दुओं O, A, B तथा C से गुज़रते हुए गोले के केन्द्र का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए, जहाँ O मूल-बिन्दु है ।

A variable plane passes through a fixed point (a, b, c) and meets the axes at points A, B and C respectively. Find the locus of the centre of the sphere passing through the points O, A, B and C, O being the origin. *10*

Q2. (a) निम्नलिखित समीकरण निकाय के सभी हलों को पंक्ति-समानीत विधि से ज्ञात कीजिए :

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5$$
$$-x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -1$$

Find all solutions to the following system of equations by row-reduced method : *15*

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5$$
$$-x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -1$$

(b) एक l लम्बाई के तार को दो भागों में काटकर क्रमश: एक वर्ग तथा एक वृत्त के रूप में मोड़ा गया है । लग्रांज की अनिर्धारित गुणक विधि का प्रयोग करके, इस तरह से प्राप्त किए गए क्षेत्रफलों के योगफल का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए ।

A wire of length l is cut into two parts which are bent in the form of a square and a circle respectively. Using Lagrange's method of undetermined multipliers, find the least value of the sum of the areas so formed. *15*

(c) यदि P, Q, R; P′, Q′, R′, एक बिन्दु से दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ पर छ: (सिक्स) अभिलम्ब पाद हैं तथा $lx + my + nz = p$ से समतल PQR निरूपित है, दर्शाइए कि $\frac{x}{a^2 l} + \frac{y}{b^2 m} + \frac{z}{c^2 n} + \frac{1}{p} = 0$, समतल P′Q′R′ को निरूपित करता है ।

If P, Q, R; P′, Q′, R′ are feet of the six normals drawn from a point to the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, and the plane PQR is represented by $lx + my + nz = p$, show that the plane P′Q′R′ is given by $\frac{x}{a^2 l} + \frac{y}{b^2 m} + \frac{z}{c^2 n} + \frac{1}{p} = 0$. *20*

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

Q3. (a) माना समुच्चय $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} x - y - z = 0 \text{ तथा} \\ 2x - y + z = 0 \end{array} \right\}$

सदिश समष्टि $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ के सदिशों का एक समूह है । तब

(i) सिद्ध कीजिए कि P, $\mathbb{R}^3$ की एक उपसमष्टि है ।

(ii) P का एक आधार तथा विमा ज्ञात कीजिए ।

Let the set $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} x - y - z = 0 \text{ and} \\ 2x - y + z = 0 \end{array} \right\}$

be the collection of vectors of a vector space $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. Then

(i) prove that P is a subspace of $\mathbb{R}^3$.

(ii) find a basis and dimension of P. *10+10*

(b) द्विश: समाकलन का उपयोग करके, वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ तथा परवलय $y^2 = 3x$ के उभयनिष्ठ क्षेत्रफल का परिकलन कीजिए ।

Use double integration to calculate the area common to the circle $x^2 + y^2 = 4$ and the parabola $y^2 = 3x$. *15*

(c) लघुतम संभाव्य त्रिज्या के गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सरल रेखाओं :

$\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1}$ तथा $\frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}$ को स्पर्श करता है ।

Find the equation of the sphere of smallest possible radius which touches the straight lines : $\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1}$ and $\frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}$. *15*

Q4. (a) एक रैखिक प्रतिचित्र $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ज्ञात कीजिए जो कि $\mathbb{R}^2$ के प्रत्येक सदिश को θ कोण से घुमा देता है । यह भी सिद्ध कीजिए कि $\theta = \frac{\pi}{2}$ के लिए, T का कोई भी अभिलक्षणिक मान (आइगेनमान) $\mathbb{R}$ में नहीं है ।

Find a linear map $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ which rotates each vector of $\mathbb{R}^2$ by an angle θ. Also, prove that for $\theta = \frac{\pi}{2}$, T has no eigenvalue in $\mathbb{R}$. *15*

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

(b) वक्र $y^2x^2 = x^2 - a^2$ का अनुरेख (ट्रेस) कीजिए, जहाँ a एक वास्तविक अचर है ।

Trace the curve $y^2x^2 = x^2 - a^2$, where a is a real constant. *20*

(c) यदि समतल $ux + vy + wz = 0$, शंकु $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ को लंब जनकों में काटता है, तो सिद्ध कीजिए कि $(b + c)\,u^2 + (c + a)\,v^2 + (a + b)\,w^2 = 0$.

If the plane $ux + vy + wz = 0$ cuts the cone $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ in perpendicular generators, then prove that
$(b + c)\,u^2 + (c + a)\,v^2 + (a + b)\,w^2 = 0$. *15*

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

खण्ड B

SECTION B

Q5. (a) दर्शाइए कि अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ का व्यापक हल

$$y = \frac{Q}{P} - e^{-\int P\,dx} \left\{ C + \int e^{\int P\,dx}\, d\left(\frac{Q}{P}\right) \right\}$$

के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ P, Q, x के शून्येतर फलन हैं तथा C एक स्वेच्छ अचर है ।

Show that the general solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ can be written in the form $y = \frac{Q}{P} - e^{-\int P\,dx} \left\{ C + \int e^{\int P\,dx}\, d\left(\frac{Q}{P}\right) \right\}$, where P, Q are non-zero functions of x and C, an arbitrary constant. *10*

(b) दर्शाइए कि परवलयों के निकाय : $x^2 = 4a\,(y + a)$ के लंबकोणीय संछेदी, उसी निकाय में स्थित होते हैं ।

Show that the orthogonal trajectories of the system of parabolas : $x^2 = 4a\,(y + a)$ belong to the same system. *10*

(c) w भार का एक पिंड, θ कोण से झुके हुए एक रूक्ष समतल पर स्थित है, घर्षण गुणांक μ, tan θ से अधिक है । पिंड को समतल पर ऊपर की तरफ 'b' दूरी तक धीरे-धीरे खींचने तथा वापस आरम्भिक बिन्दु तक खींचने में किए गए कार्य को ज्ञात कीजिए, जहाँ लगाया गया बल प्रत्येक दशा में समतल के समान्तर है ।

A body of weight w rests on a rough inclined plane of inclination θ, the coefficient of friction, μ, being greater than tan θ. Find the work done in slowly dragging the body a distance 'b' up the plane and then dragging it back to the starting point, the applied force being in each case parallel to the plane. *10*

(d) एक प्रक्षेप्य $\sqrt{2gh}$ वेग के साथ बिन्दु O से प्रक्षेपित किया गया तथा समतल के बिन्दु P(x, y) पर स्पर्श-रेखा से टकराता है जहाँ अक्ष OX तथा OY क्रमशः बिन्दु O से क्षैतिज तथा अधोमुखी ऊर्ध्वाधर रेखाएँ हैं । यदि प्रक्षेपण की दो संभव दिशाएँ समकोण पर हों, तो दर्शाइए कि $x^2 = 2hy$ तथा प्रक्षेपण की संभव दिशाओं में से एक, कोण POX को द्विभाजित करती है ।

A projectile is fired from a point O with velocity $\sqrt{2gh}$ and hits a tangent at the point P(x, y) in the plane, the axes OX and OY being horizontal and vertically downward lines through the point O, respectively. Show that if the two possible directions of projection be at right angles, then $x^2 = 2hy$ and then one of the possible directions of projection bisects the angle POX. *10*

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

(e) दर्शाइए कि $\vec{A} = (6xy + z^3)\hat{i} + (3x^2 - z)\hat{j} + (3xz^2 - y)\hat{k}$ अघूर्णी है । ϕ को भी ज्ञात कीजिए जबकि $\vec{A} = \nabla\phi$.

Show that $\vec{A} = (6xy + z^3)\hat{i} + (3x^2 - z)\hat{j} + (3xz^2 - y)\hat{k}$ is irrotational. Also find ϕ such that $\vec{A} = \nabla\phi$. *10*

Q6. (a) $2l$ लम्बाई का एक तार (केबिल) जिसका भार w प्रति इकाई (यूनिट) लम्बाई है, एक क्षैतिज रेखा के दो बिन्दुओं P तथा Q से लटकी हुई है । दर्शाइए कि तार की विस्तृति (स्पैन) $2l\left(1 - \frac{2h^2}{3l^2}\right)$ है, जहाँ h तार के कसकर खींची हुई स्थिति में मध्य का झोल है ।

A cable of weight w per unit length and length $2l$ hangs from two points P and Q in the same horizontal line. Show that the span of the cable is $2l\left(1 - \frac{2h^2}{3l^2}\right)$, where h is the sag in the middle of the tightly stretched position. *20*

(b) प्राचल-विचरण विधि का उपयोग करके, निम्नलिखित अवकल समीकरण :

$$(x^2 - 1)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = (x^2 - 1)^2$$

को हल कीजिए, जहाँ समानीत समीकरण का एक हल $y = x$ दिया गया है ।

Solve the following differential equation by using the method of variation of parameters : $(x^2 - 1)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = (x^2 - 1)^2$, given that $y = x$ is one solution of the reduced equation. *15*

(c) समतल में ग्रीन के प्रमेय को $\oint_C (3x^2 - 8y^2)\,dx + (4y - 6xy)\,dy$ के लिए सत्यापित कीजिए, जहाँ C, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ द्वारा परिभाषित क्षेत्र का सीमा वक्र है ।

Verify Green's theorem in the plane for $\oint_C (3x^2 - 8y^2)\,dx + (4y - 6xy)\,dy$, where C is the boundary curve of the region defined by $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$. *15*

Q7. (a) स्टोक्स प्रमेय को $\vec{F} = x\hat{i} + z^2\hat{j} + y^2\hat{k}$ के लिए प्रथम अष्टांशक में स्थित समतल पृष्ठ : $x + y + z = 1$ पर सत्यापित कीजिए ।

Verify Stokes' theorem for $\vec{F} = x\hat{i} + z^2\hat{j} + y^2\hat{k}$ over the plane surface : $x + y + z = 1$ lying in the first octant. *20*

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

(b) लाप्लास रूपांतरण का उपयोग करके निम्नलिखित प्रारंभिक मान समस्या :

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = h(t), \text{ जहाँ } h(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 4, \\ 0, & t > 4, \end{cases} \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 0$$

को हल कीजिए ।

Solve the following initial value problem by using Laplace's transformation $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = h(t)$, where

$$h(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 4, \\ 0, & t > 4, \end{cases} \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 0$$ *15*

(c) माना किसी भी अनुप्रस्थ-काट का एक बेलन दूसरे स्थिर बेलन पर संतुलित है, जहाँ वक्रीय पृष्ठों का संस्पर्श रूक्ष है तथा उभयनिष्ठ स्पर्श-रेखा क्षैतिज है । माना दोनों बेलनों के स्पर्श बिन्दु पर उनकी वक्रता त्रिज्याएँ ρ तथा ρ' हैं और संस्पर्श बिन्दु से ऊपरी बेलन के गुरुत्व केन्द्र की ऊँचाई h है । दर्शाइए कि स्थायी साम्य में ऊपरी बेलन संतुलित है यदि $h < \frac{\rho\rho'}{\rho + \rho'}$ ।

Suppose a cylinder of any cross-section is balanced on another fixed cylinder, the contact of curved surfaces being rough and the common tangent line horizontal. Let ρ and ρ' be the radii of curvature of the two cylinders at the point of contact and h be the height of centre of gravity of the upper cylinder above the point of contact. Show that the upper cylinder is balanced in stable equilibrium if $h < \frac{\rho\rho'}{\rho + \rho'}$. *15*

Q8. (a) (i) अवकल समीकरण : $(x^2 - a^2)\,p^2 - 2xyp + y^2 + a^2 = 0$, जहाँ $p = \frac{dy}{dx}$, के व्यापक व विचित्र हलों को ज्ञात कीजिए । व्यापक व विचित्र हलों के बीच ज्यामितीय संबंध को भी दीजिए ।

Find the general and singular solutions of the differential equation : $(x^2 - a^2)\,p^2 - 2xyp + y^2 + a^2 = 0$, where $p = \frac{dy}{dx}$. Also give the geometric relation between the general and singular solutions. *10*

(ii) निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$(3x + 2)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 5\,(3x + 2)\frac{dy}{dx} - 3y = x^2 + x + 1$$

Solve the following differential equation : *10*

$$(3x + 2)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 5\,(3x + 2)\frac{dy}{dx} - 3y = x^2 + x + 1$$

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

(b) n बराबर एकसमान छड़ों की एक शृंखला एक-दूसरे के साथ चिकने रूप से जुड़ी हुई है तथा इसके एक सिरे A_1 से लटकी हुई है । एक क्षैतिज बल $\vec{P}$ शृंखला के दूसरे सिरे A_{n+1} पर लगाया गया है । साम्य विन्यास में अधोमुखी ऊर्ध्वाधर रेखा से छड़ों के झुकाव ज्ञात कीजिए ।

A chain of n equal uniform rods is smoothly jointed together and suspended from its one end A_1. A horizontal force $\vec{P}$ is applied to the other end A_{n+1} of the chain. Find the inclinations of the rods to the downward vertical line in the equilibrium configuration. *15*

(c) गाउस के अपसरण प्रमेय का उपयोग करके $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ का मान निकालिए, जहाँ $\vec{F} = x\hat{i} - y\hat{j} + (z^2 - 1)\hat{k}$ तथा S, पृष्ठों $z = 0,\ z = 1,\ x^2 + y^2 = 4$ द्वारा बना हुआ बेलन है ।

Using Gauss' divergence theorem, evaluate $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$, where $\vec{F} = x\hat{i} - y\hat{j} + (z^2 - 1)\hat{k}$ and S is the cylinder formed by the surfaces $z = 0,\ z = 1,\ x^2 + y^2 = 4$. *15*

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE

SPM IAS ACADEMY
SHAPING BRILLIANCE