वियोज्य DETACHABLE

गणित (प्रश्न-पत्र I)
MATHEMATICS (Paper I)

निर्धारित समय : तीन घण्टे
Time Allowed : Three Hours

अधिकतम अंक : 250
Maximum Marks : 250

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

उत्तर देने के पूर्व निम्नलिखित निर्देशों को कृपया सावधानीपूर्वक पढ़ें ।

इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो **दो खण्डों** में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेज़ी** दोनों में छपे हुए हैं ।

उम्मीदवार को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के लिए नियत अंक उसके सामने दिए गए हैं ।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए । प्राधिकृत माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे ।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए ।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं ।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो । प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए ।

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions.

There are **EIGHT** questions divided in **TWO SECTIONS** and printed both in **HINDI** and in **ENGLISH**.

Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** question from each section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड 'A' SECTION 'A'

1.(a) मान लीजिए $V_1 = (2, -1, 3, 2)$, $V_2 = (-1, 1, 1, -3)$, $V_3 = (1, 1, 9, -5)$ समष्टि $\mathbb{R}^4$ के तीन सदिश हैं। क्या $(3, -1, 0, -1) \in$ विस्तृति $\{V_1, V_2, V_3\}$? अपने उत्तर को तर्कसहित सिद्ध कीजिए।

Let $V_1 = (2, -1, 3, 2)$, $V_2 = (-1, 1, 1, -3)$ and $V_3 = (1, 1, 9, -5)$ be three vectors of the space $\mathbb{R}^4$. Does $(3, -1, 0, -1) \in$ span $\{V_1, V_2, V_3\}$? Justify your answer. 10

1.(b) $T(x, y, z) = (x + z, x + y + 2z, 2x + y + 3z)$ द्वारा दिए गए रैखिक रूपांतरण : $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ की कोटि तथा शून्यता ज्ञात कीजिए।

Find the rank and nullity of the linear transformation :
$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ given by $T(x, y, z) = (x + z, x + y + 2z, 2x + y + 3z)$ 10

1.(c) p तथा q के वो मान निकालिए जिसके लिए $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(1 + p\cos x) - q\sin x}{x^3}$ का अस्तित्व है एवं 1 के बराबर है।

Find the values of p and q for which $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(1 + p\cos x) - q\sin x}{x^3}$ exists and equals 1. 10

1.(d) समाकल $\int_0^1 \dfrac{\log x}{1 + x} dx$ की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए।

Examine the convergence of the integral $\int_0^1 \dfrac{\log x}{1 + x} dx$ 10

1.(e) एक चर समतल, जो कि मूल-बिन्दु O से अचर दूरी $3p$ पर है, अक्षों को क्रमशः बिन्दुओं A, B, C पर काटता है। दर्शाइए कि चतुष्फलक $OABC$ के केन्द्रक का बिन्दुपथ

$$9\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) = \frac{16}{p^2}$$ है।

A variable plane which is at a constant distance $3p$ from the origin O cuts the axes in the points A, B, C respectively. Show that the locus of the centroid of the tetrahedron $OABC$ is

$$9\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) = \frac{16}{p^2}.$$ 10

2.(a) यदि आधार $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ के सापेक्ष रैखिक रूपांतरण $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ का आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ है,}$$

तब आधार $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ के सापेक्ष T का आव्यूह ज्ञात कीजिए ।

If the matrix of a linear transformation $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ relative to the basis $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ is

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

then find the matrix of T relative to the basis $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$. 15

2.(b) दो परवलयजों $Z = 5(x^2 + y^2)$ और $Z = 6 - 7x^2 - y^2$ के बीच घिरे ठोस के आयतन को दर्शाने वाले त्रिश: समाकल का मान निकालिए ।

Evaluate the triple integral which gives the volume of the solid enclosed between the two paraboloids $Z = 5(x^2 + y^2)$ and $Z = 6 - 7x^2 - y^2$. 15

2.(c)(i) दर्शाइए कि समीकरण $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y - 12z + 11 = 0$ एक दीर्घवृत्तीय परवलयज प्रदर्शित करता है । साथ ही मुख्य अक्ष और मुख्य समतलों को भी ज्ञात कीजिए ।

Show that the equation $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y - 12z + 11 = 0$ represents an elliptic paraboloid. Also find its principal axis and principal planes. 10

2.(c)(ii) समतल $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, निर्देशांक अक्षों को क्रमश: A, B, C में मिलता है । सिद्ध कीजिये कि मूल बिन्दु O से वृत्त ABC को मिलाने वाली रेखाओं द्वारा जनित शंकु का समीकरण

$$yz\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + zx\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + xy\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) = 0 \text{ है ।}$$

The plane $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ meets the coordinate axes in A, B, C respectively. Prove that the equation of the cone generated by the lines drawn from the origin O to meet the circle ABC is

$$yz\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + zx\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + xy\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) = 0.$$ 10

3.(a) दिया गया है $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(i) आव्यूह A के लिये कैले-हैमिल्टन प्रमेय को सत्यापित कीजिए ।

(ii) दर्शाइए कि $n \geqslant 3$ के लिये $A^n = A^{n-2} + A^2 - I$; जहाँ I कोटि 3 का तत्समक आव्यूह है । अतएव A^{40} ज्ञात कीजिए ।

Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(i) Verify the Cayley-Hamilton theorem for the matrix A.

(ii) Show that $A^n = A^{n-2} + A^2 - I$ for $n \geqslant 3$, where I is the identity matrix of order 3. Hence, find A^{40}. 10+10

3.(b) तर्क सहित दर्शाइये कि (0, 0), फलन $f(x, y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2$ का चरम-बिन्दु है अथवा नहीं ।

Justify whether (0, 0) is an extreme point for the function $f(x, y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2$. 15

3.(c) वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z - 16 = 0;\ 3x + y + 3z - 4 = 0$ से होकर गुजरने वाले गोले का समीकरण निम्न दो स्थितियों में ज्ञात कीजिए ।

(i) बिन्दु (1, 0, –3) गोले पर हो ।

(ii) दिया गया वृत्त गोले का एक वृहत् वृत्त हो ।

Find the equation of the sphere through the circle
$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z - 16 = 0;\ 3x + y + 3z - 4 = 0$
in the following two cases.

(i) the point (1, 0, –3) lies on the sphere.

(ii) the given circle is a great circle of the sphere. 15

4.(a) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

का पंक्ति समानीत सोपानक रूप में समानयन करके उसकी कोटि ज्ञात कीजिए ।

Find the rank of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

by reducing it to row-reduced echelon form. 15

4.(b) वक्र $y^2(x^2 - 1) = 2x - 1$ को अनुरेखित कीजिए ।

Trace the curve $y^2(x^2 - 1) = 2x - 1$. 20

4.(c) सिद्ध कीजिए कि रेखाओं $y = mx,\ z = c;\ y = -mx,\ z = -c$ और वृत्त $x^2 + y^2 = a^2,\ z = 0$ से मिलने वाली रेखा का बिन्दु-पथ $c^2m^2(cy - mzx)^2 + c^2(yz - cmx)^2 = a^2m^2(z^2 - c^2)^2$ है ।

Prove that the locus of a line which meets the lines $y = mx,\ z = c;\ y = -mx,\ z = -c$ and the circle $x^2 + y^2 = a^2,\ z = 0$ is $c^2m^2(cy - mzx)^2 + c^2(yz - cmx)^2 = a^2m^2(z^2 - c^2)^2$. 15

खण्ड 'B' SECTION 'B'

5.(a) प्रारम्भिक-मान समस्या : $\frac{dy}{dx} - 2xy = 2,\quad y(0) = 1$ का हल $y = e^{x^2}\left[1 + \sqrt{\pi}\, erf(x)\right]$ के रूप में प्राप्त कीजिए ।

Obtain the solution of the initial-value problem $\frac{dy}{dx} - 2xy = 2,\quad y(0) = 1$ in the form $y = e^{x^2}\left[1 + \sqrt{\pi}\, erf(x)\right]$. 10

5.(b) दिया गया है $L\{f(t);\, p\} = F(p)$.

दर्शाइए कि $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty F(x)\,dx$. अतः समाकल $\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t}\,dt$ का मान ज्ञात कीजिए ।

Given that $L\{f(t);\, p\} = F(p)$.

Show that $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty F(x)\,dx$. Hence evaluate the integral $\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t}\,dt$. 10

5.(c) अर्द्धव्यास 'a' का एक बेलन (सिलिंडर) एक जनक रेखा के अनुदिश एक ऊर्ध्वाधर दीवार को स्पर्श किया हुआ है । बेलन का अक्ष क्षैतिजतः स्थिर है । लम्बाई 'l' तथा भार 'W' का एक एक समान समतल दंड ऊर्ध्वाधर से 45° का कोण बनाते हुए अपने सिरों को दीवार के सहारे तथा बेलन पर टिकाए हैं । अगर घर्षण बल नगण्य हैं, तब दर्शाइए कि

$$\frac{a}{l} = \frac{\sqrt{5} + 5}{4\sqrt{2}}$$

दीवार और बेलन की प्रतिक्रियायें भी ज्ञात कीजिए ।

A cylinder of radius 'a' touches a vertical wall along a generating line. Axis of the cylinder is fixed horizontally. A uniform flat beam of length 'l' and weight 'W' rests with its extremities in contact with the wall and the cylinder, making an angle of 45° with the vertical. If frictional forces are neglected, then show that

$$\frac{a}{l} = \frac{\sqrt{5} + 5}{4\sqrt{2}}.$$

Also, find the reactions of the cylinder and wall. 10

5.(d) कोई कण केन्द्र 'O' के सापेक्ष आवर्त काल T के साथ सरल आवर्त गति में गतिशील है। कण बिन्दु P से OP के अनुदिश दिशा में v वेग से गुजरता है तथा $OP = p$ है। कण का बिन्दु P पर पुनः लौटने में लगा समय ज्ञात कीजिए। यदि लगा समय $\frac{T}{2}$ हो, तो p का मान क्या होगा ?

A particle is moving under Simple Harmonic Motion of period T about a centre O. It passes through the point P with velocity v along the direction OP and $OP = p$. Find the time that elapses before the particle returns to the point P. What will be the value of p when the elapsed time is $\frac{T}{2}$? 10

5.(e) यदि
$$\vec{a} = \sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j} + \theta\,\hat{k}$$
$$\vec{b} = \cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j} - 3\hat{k}$$
$$\vec{c} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}$$

तो सदिश फलन $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ के θ के सापेक्ष अवकलज के मान, $\theta = \frac{\pi}{2}$ और $\theta = \pi$ पर ज्ञात कीजिए।

If
$$\vec{a} = \sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j} + \theta\,\hat{k}$$
$$\vec{b} = \cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j} - 3\hat{k}$$
$$\vec{c} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}$$

then find the values of the derivative of the vector function $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ w.r.t. θ at $\theta = \frac{\pi}{2}$ and $\theta = \pi$. 10

6.(a) अवकल समीकरण :
$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 2y = e^x + \cos x$$
का हल कीजिए।

Solve the differential equation :
$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 2y = e^x + \cos x.$$
15

6.(b) एक कण को समुद्र तल पर बिन्दु O_1 से वेग v तथा क्षैतिज से प्रक्षेप कोण θ पर ऊर्ध्वाधर तल में प्रक्षेपित किया जाता है तो क्षैतिज परास R_1 है। यदि इसको पुनः बिन्दु O_2, जो उसी ऊर्ध्वाधर तल में O_1 के ऊर्ध्वाधरतः h ऊँचाई पर है, से उसी वेग v तथा क्षैतिज से समान कोण θ पर प्रक्षेपित किया जाता है तो क्षैतिज परास R_2 है।

सिद्ध कीजिए $R_2 > R_1$ तथा $(R_2 - R_1) : R_1 = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(1 + \frac{2gh}{v^2 \sin^2\theta}\right)} - 1\right\} : 1$

When a particle is projected from a point O_1 on the sea level with a velocity v and angle of projection θ with the horizon in a vertical plane, its horizontal range is R_1. If it is further projected from a point O_2, which is vertically above O_1 at a height h in the same vertical plane, with the same velocity v and same angle θ with the horizon, its horizontal range is R_2. Prove that $R_2 > R_1$ and $(R_2 - R_1) : R_1$ is equal to

$$\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(1+\frac{2gh}{v^2 \sin^2 \theta}\right)}-1\right\} : 1$$ 15

6.(c) समाकल $\iint_S \left(3y^2z^2\,\hat{i}+4z^2x^2\,\hat{j}+z^2y^2\,\hat{k}\right)\cdot\hat{n}\,dS$

का मान ज्ञात कीजिए; जहाँ S समतल $z=0$ के ऊपर पृष्ठ $4x^2+4y^2+4z^2=1$ का ऊपरी भाग है और xy-समतल द्वारा परिबद्ध है। अतैव गॉस-अपसरण प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

Evaluate the integral $\iint_S \left(3y^2z^2\,\hat{i}+4z^2x^2\,\hat{j}+z^2y^2\,\hat{k}\right)\cdot\hat{n}\,dS$,

where S is the upper part of the surface $4x^2+4y^2+4z^2=1$ above the plane $z=0$ and bounded by the xy-plane. Hence, verify Gauss-Divergence theorem. 20

7.(a)(i) अवकल समीकरण : $\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy^3+2}{3x^2y^2+8e^{4y}}$ का हल ज्ञात कीजिए।

Find the solution of the differential equation : $\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy^3+2}{3x^2y^2+8e^{4y}}$ 10

7.(a)(ii) समीकरण $x^2p^2+y(2x+y)p+y^2=0$ का प्रतिस्थापन $y=u$ और $xy=v$ द्वारा क्लेरो रूप में समानयन कीजिए। अत: समीकरण का हल निकालिए और दर्शाइए कि $y+4x=0$ अवकल समीकरण का एक विचित्र हल है।

Reduce the equation $x^2p^2+y(2x+y)p+y^2=0$ to Clairaut's form by the substitution $y=u$ and $xy=v$. Hence solve the equation and show that $y+4x=0$ is a singular solution of the differential equation. 10

7.(b) एक ठोस अर्द्ध-गोलक एक डोरी द्वारा, जिसका एक सिरा एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार पर एक बिन्दु से और दूसरा सिरा अर्द्धगोलक के किनारे (रिम) पर स्थित एक बिन्दु से बंधा है, ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे टिका है। ठोस अर्द्धगोलक का वक्रित पृष्ठ दीवार को स्पर्श करता है। अगर ऊर्ध्वाधर के साथ डोरी का आनति कोण θ है और अर्द्धगोलक के समतल आधार (बेस) का आनति कोण ϕ है तो $(\tan\phi-\tan\theta)$ का मान ज्ञात कीजिए।

A solid hemisphere is supported by a string fixed to a point on its rim and to a point on a smooth vertical wall with which the curved surface is in contact. If θ is the angle of inclination of the string with vertical and ϕ is the angle of inclination of the plane base of the hemisphere to the vertical, then find the value of $(\tan\phi-\tan\theta)$. 15

7.(c) अगर एक वक्र की स्पर्श रेखा एक नियत रेखा के साथ एक स्थिर कोण θ बनाती है तो सिद्ध कीजिए कि वक्रता की त्रिज्या के साथ व्यावर्तन त्रिज्या का अनुपात $\tan\theta$ के समानुपाती है। और आगे सिद्ध कीजिए कि अगर यह अनुपात एक स्थिरांक है, तो स्पर्श रेखा एक नियत दिशा के साथ एक स्थिर कोण बनाती है।

If the tangent to a curve makes a constant angle θ with a fixed line, then prove that the ratio of radius of torsion to radius of curvature is proportional to $\tan\theta$. Further prove that if this ratio is constant, then the tangent makes a constant angle with a fixed direction. 15

8.(a) लाप्लास रूपान्तर प्रविधि का उपयोग कर निम्नलिखित प्रारम्भिक मान समस्या को हल कीजिए।

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 3y(t) = f(t),$$

$y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ और $f(t)$, t का एक दिया गया फलन है।

Solve the following initial value problem by using Laplace transform technique :

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 3y(t) = f(t),$$

$y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ and $f(t)$ is a given function of t. 15

8.(b) एक कण, बल-केन्द्र से $\sqrt{c}$ दूरी पर स्थित एक स्तब्धिका से $\sqrt{\frac{2\lambda}{3}c^3}$ वेग से प्रक्षेपित किया जाता है और यह केन्द्रीय त्वरण $\lambda(r^5 - c^2r)$ से गतिशील है। इस कण की गति का पथ ज्ञात कीजिए। क्या यह वक्र $x^4 + y^4 = c^2$ होगा ?

A particle is projected from an apse at a distance $\sqrt{c}$ from the centre of force with a velocity $\sqrt{\frac{2\lambda}{3}c^3}$ and is moving with central acceleration $\lambda(r^5 - c^2r)$. Find the path of motion of this particle. Will that be the curve $x^4 + y^4 = c^2$? 20

8.(c) एक अदिश बिन्दु फलन ϕ और सदिश बिन्दु फलन $\vec{f}$ के लिये निम्नलिखित सर्वसमिका सिद्ध कीजिए

$$\nabla\cdot(\phi\vec{f}) = \nabla\phi\cdot\vec{f} + \phi(\nabla\cdot\vec{f})$$

$\nabla\cdot\left(\frac{f(r)}{r}\vec{r}\right)$ का मान भी ज्ञात कीजिए और तब उल्लेखित सर्वसमिका का सत्यापन कीजिए।

For a scalar point function ϕ and vector point function $\vec{f}$, prove the identity $\nabla\cdot(\phi\vec{f}) = \nabla\phi\cdot\vec{f} + \phi(\nabla\cdot\vec{f})$. Also find the value of $\nabla\cdot\left(\frac{f(r)}{r}\vec{r}\right)$ and then verify stated identity. 15