CS (Main) Exam,2021

HXS–B–MTH

गणित (प्रश्न-पत्र–II)

समय : तीन घण्टे	अधिकतम अंक : 250

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

(कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़िए)

इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो दो खण्डों में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेजी** दोनों में छपे हुए हैं।

परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू० सी० ए०) पुस्तिका के मुखपृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए, तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए।

MATHEMATICS (PAPER–II)

Time Allowed : Three Hours	Maximum Marks : 250

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

(Please read each of the following instructions carefully before attempting questions)

There are EIGHT questions divided in two Sections and printed both in HINDI and in ENGLISH.

Candidate has to attempt FIVE questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, THREE are to be attempted choosing at least ONE question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड—A / SECTION—A

1\. (a) मान लीजिए कि $m_1, m_2, \cdots, m_k$ धनात्मक पूर्णांक हैं तथा $d > 0$, $m_1, m_2, \cdots, m_k$ का महत्तम समापवर्तक है। दर्शाइए कि ऐसे पूर्णांक $x_1, x_2, \cdots, x_k$ अस्तित्व में हैं ताकि

$$d = x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_k m_k$$

Let $m_1, m_2, \cdots, m_k$ be positive integers and $d > 0$ the greatest common divisor of $m_1, m_2, \cdots, m_k$. Show that there exist integers $x_1, x_2, \cdots, x_k$ such that

$$d = x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_k m_k$$ 10

(b) श्रेणी

$$x^4 + \frac{x^4}{1+x^4} + \frac{x^4}{(1+x^4)^2} + \frac{x^4}{(1+x^4)^3} + \cdots$$

के [0, 1] पर एकसमान अभिसरण की जाँच कीजिए।

Test the uniform convergence of the series

$$x^4 + \frac{x^4}{1+x^4} + \frac{x^4}{(1+x^4)^2} + \frac{x^4}{(1+x^4)^3} + \cdots$$

on [0, 1]. 10

(c) यदि एक फलन f, अन्तराल $[a, b]$ में एकदिष्ट है, तब सिद्ध कीजिए कि f, $[a, b]$ में रीमान समाकलनीय है।

If a function f is monotonic in the interval $[a, b]$, then prove that f is Riemann integrable in $[a, b]$. 10

(d) मान लीजिए कि $c : [0, 1] \to \mathbf{C}$, $c(t) = e^{4\pi it}$, $0 \le t \le 1$ के द्वारा परिभाषित एक वक्र है। कन्टूर समाकल $\int_c \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2}$ का मान निकालिए।

Let $c : [0, 1] \to \mathbf{C}$ be the curve, where $c(t) = e^{4\pi it}$, $0 \le t \le 1$. Evaluate the contour integral $\int_c \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2}$. 10

(e) एक कम्पनी के एक विभाग के पाँच कर्मचारियों को पाँच कार्य सम्पन्न करने हैं। जितना समय (घंटों में) एक व्यक्ति एक कार्य को सम्पन्न करने के लिए लेता है, वह प्रभाविता आव्यूह में दिया गया है। इन पाँच कर्मचारियों को इन सभी कार्यों को इस तरह निर्धारित कीजिए जिससे कि समस्त कार्य सम्पन्न करने का समय न्यूनतम हो :

कर्मचारी

कार्य	I	II	III	IV	V
A	10	5	13	15	16
B	3	9	18	13	6
C	10	7	2	2	2
D	7	11	9	7	12
E	7	9	10	4	12

A department of a company has five employees with five jobs to be performed. The time (in hours) that each man takes to perform each job is given in the effectiveness matrix. Assign all the jobs to these five employees to minimize the total processing time :

		Employees				
		I	*II*	*III*	*IV*	*V*
	A	10	5	13	15	16
	B	3	9	18	13	6
Jobs	*C*	10	7	2	2	2
	D	7	11	9	7	12
	E	7	9	10	4	12

10

2. *(a)* $f(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ का, $0 \le x \le 1$ के लिए, अधिकतम तथा न्यूनतम मान निकालिए।

Find the maximum and minimum values of $f(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ for $0 \le x \le 1$. 15

(b) मान लीजिए कि F एक क्षेत्र है तथा $f(x) \in F[x]$, क्षेत्र F के ऊपर घात > 0 का एक बहुपद है। दर्शाइए कि एक क्षेत्र F' तथा एक अंतःस्थापन $q : F \to F'$ इस प्रकार से अस्तित्व में हैं कि बहुपद $f^q \in F'[x]$ का एक मूल F' में है, जहाँ f^q, f के प्रत्येक गुणांक a को $q(a)$ द्वारा प्रतिस्थापित करने से प्राप्त होता है।

Let F be a field and $f(x) \in F[x]$ a polynomial of degree > 0 over F. Show that there is a field F' and an imbedding $q : F \to F'$ s.t. the polynomial $f^q \in F'[x]$ has a root in F', where f^q is obtained by replacing each coefficient a of f by $q(a)$. 15

(c) क्षेत्र $|z+1| > 3$ में $f(z) = \dfrac{z^2 - z + 1}{z(z^2 - 3z + 2)}$ का लौराँ श्रेणी प्रसार, $(z+1)$ की घातों में ज्ञात कीजिए।

Find the Laurent series expansion of $f(z) = \dfrac{z^2 - z + 1}{z(z^2 - 3z + 2)}$ in the powers of $(z+1)$ in the region $|z+1| > 3$. 20

3. *(a)* मान लीजिए कि f एक सर्वत्र वैश्लेषिक फलन है जिसके केन्द्र $z = 0$ पर टेलर श्रेणी प्रसार में अपरिमित रूप से अनेक पद हैं। दर्शाइए कि $f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ की $z = 0$ एक अनिवार्य विचित्रता है।

Let f be an entire function whose Taylor series expansion with centre $z = 0$ has infinitely many terms. Show that $z = 0$ is an essential singularity of $f\left(\dfrac{1}{z}\right)$. 15

(b) शर्तों $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ तथा $lx + my + nz = 0$ से प्रतिबन्धित $x^2 + y^2 + z^2$ के स्तब्ध (अचर) मान निकालिए। परिणाम की ज्यामितीय व्याख्या कीजिए।

Find the stationary values of $x^2 + y^2 + z^2$ subject to the conditions $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ and $lx + my + nz = 0$. Interpret the result geometrically. 20

(c) निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को द्वैती रैखिक प्रोग्रामन समस्या में परिवर्तित कीजिए :

न्यूनतमीकरण कीजिए $Z = x_1 - 3x_2 - 2x_3$

बशर्ते कि

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7$$
$$2x_1 - 4x_2 \ge 12$$
$$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 10$$

जहाँ $x_1, x_2 \ge 0$ तथा x_3 का चिह्न अप्रतिबंधित है।

Convert the following LPP into dual LPP :

Minimize $Z = x_1 - 3x_2 - 2x_3$

subject to

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7$$
$$2x_1 - 4x_2 \ge 12$$
$$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 10$$

where $x_1, x_2 \ge 0$ and x_3 is unrestricted in sign. 15

4. (a) दर्शाइए कि परिमेय संख्याओं के योज्य समूह $\mathbb{Q}$ के अपरिमित रूप से अनेक उपसमूह हैं।

Show that there are infinitely many subgroups of the additive group $\mathbb{Q}$ of rational numbers. 15

(b) कन्टूर समाकलन का उपयोग कर समाकल $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x(x^2 + a^2)}$, $a > 0$ का मान ज्ञात कीजिए।

Using contour integration, evaluate the integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x(x^2 + a^2)}$, $a > 0$. 20

(c) बड़ा M (बिग M) विधि का उपयोग करके निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए :

अधिकतमीकरण कीजिए $Z = 4x_1 + 5x_2 + 2x_3$

बशर्ते कि

$$2x_1 + x_2 + x_3 \ge 10$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 \le 12$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Solve the following linear programming problem using Big M method :

Maximize $Z = 4x_1 + 5x_2 + 2x_3$

subject to

$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 10$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 12$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$

15

खण्ड—B / SECTION—B

5. *(a)* समीकरण $f(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)=0$ से स्वैच्छिक फलन f का विलोपन कर आंशिक अवकल समीकरण को प्राप्त कीजिए।

Obtain the partial differential equation by eliminating arbitrary function f from the equation $f(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)=0$. 10

(b) प्रारंभिक मानों 0, $\frac{\pi}{2}$ का उपयोग करके एक संख्यात्मक तकनीक के द्वारा समीकरण $3x = 1+\cos x$ का एक धनात्मक मूल ज्ञात कीजिए, तथा न्यूटन-राफ्सन विधि के द्वारा परिणाम को 8 सार्थक अंकों तक और शुद्ध मान के निकट लाइए।

Find a positive root of the equation $3x = 1+\cos x$ by a numerical technique using initial values 0, $\frac{\pi}{2}$; and further improve the result using Newton-Raphson method correct to 8 significant figures. 10

(c) *(i)* $(3798 \cdot 3875)_{10}$ को अष्टाधारी तथा षोडशाधारी तुल्यमानों में बदलिए।

(ii) $(\rceil P \to R) \wedge (Q \rightleftarrows P)$ का मुख्य संयोजक सामान्य रूप (प्रिंसिपल कंजंक्टिव नॉर्मल फॉर्म) प्राप्त कीजिए।

(i) Convert $(3798 \cdot 3875)_{10}$ into octal and hexadecimal equivalents.

(ii) Obtain the principal conjunctive normal form of $(\rceil P \to R) \wedge (Q \rightleftarrows P)$. 10

(d) ऊर्ध्वाधर xy-तल में स्थित एक वृत्त के अनुदिश एक कण गति के लिए व्यवरुद्ध है। डी'एलम्बर्ट के नियम की सहायता से दर्शाइए कि इसकी गति का समीकरण $\ddot{x}y - \ddot{y}x - gx = 0$ है, जहाँ g गुरुत्वीय त्वरण है।

A particle is constrained to move along a circle lying in the vertical xy-plane. With the help of the D'Alembert's principle, show that its equation of motion is $\ddot{x}y - \ddot{y}x - gx = 0$, where g is the acceleration due to gravity. 10

(e) उद्गमों (स्रोतों) व अभिगमों (सिंकों) के किस विन्यास से वेग विभव $w = \log_e\left(z - \frac{a^2}{z}\right)$ हो सकता है? संगत धारा-रेखाओं का ख़ाका खींचिए और सिद्ध कीजिए कि उनमें से दो, वृत्त $r = a$ तथा y-अक्ष में प्रविभाजित होती हैं।

What arrangements of sources and sinks can have the velocity potential $w = \log_e\left(z - \frac{a^2}{z}\right)$? Draw the corresponding sketch of the streamlines and prove that two of them subdivide into the circle $r = a$ and the axis of y. 10

6. (a) तरंग समीकरण

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

का शर्तों

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$$
$$u(x, 0) = \frac{1}{4} x(L - x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

से प्रतिबन्धित हल ज्ञात कीजिए।

Solve the wave equation

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

subject to the conditions

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$$
$$u(x, 0) = \frac{1}{4} x(L - x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

20

(b) नीचे दी गई सारणी पर आधारित बूलीय फलन $F(x, y, z)$ को निकालिए और तब $F(x, y, z)$ को सरल कीजिए तथा उसके अनुरूप GATE परिपथ खींचिए :

x	y	z	$F(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Obtain the Boolean function $F(x, y, z)$ based on the table given below. Then simplify $F(x, y, z)$ and draw the corresponding GATE network :

x	y	z	$F(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

15

(c) एक छोटी चिकनी घिरनी के ऊपर से गुजरने वाली एक अवितान्य डोरी के सिरों से बंधे असमान संहति वाले दो कणों के निकाय की गति के लिए लग्रांजी समीकरण ज्ञात कीजिए।

Obtain the Lagrangian equation for the motion of a system of two particles of unequal masses connected by an inextensible string passing over a small smooth pulley. 15

7. (a) आंशिक अवकल समीकरण

$$(D^2 - D'^2 - 3D + 3D')z = xy + e^{x+2y}$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए, जहाँ $D \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ तथा $D' \equiv \frac{\partial}{\partial y}$ हैं।

Find the general solution of the partial differential equation

$$(D^2 - D'^2 - 3D + 3D')z = xy + e^{x+2y}$$

where $D \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ and $D' \equiv \frac{\partial}{\partial y}$. 15

(b) समीकरणों के निकाय

$$\begin{aligned} 3x_1 + 9x_2 - 2x_3 &= 11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 &= 24 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= -8 \end{aligned}$$

का गाउस-सीडल विधि द्वारा 4 सार्थक अंकों तक सही हल ज्ञात कीजिए, यह सत्यापन करने के बाद कि क्या यह विधि आपके द्वारा निकाय के रूपांतरित रूप में अनुप्रयोज्य है।

Solve the system of equations

$$3x_1 + 9x_2 - 2x_3 = 11$$
$$4x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 24$$
$$4x_1 - 2x_2 + x_3 = -8$$

correct up to 4 significant figures by using Gauss-Seidel method after verifying whether the method is applicable in your transformed form of the system. 15

(c) दर्शाइए कि $\vec{q} = \frac{\lambda(-y\hat{i} + x\hat{j})}{x^2 + y^2}$, ($\lambda$ = स्थिरांक) एक संभाव्य असंपीड्य तरल गति है। धारा-रेखाएँ निकालिए। क्या गति का प्रकार विभव है? यदि हाँ, तो वेग विभव निकालिए।

Show that $\vec{q} = \frac{\lambda(-y\hat{i} + x\hat{j})}{x^2 + y^2}$, ($\lambda$ = constant) is a possible incompressible fluid motion. Determine the streamlines. Is the kind of the motion potential? If yes, then find the velocity potential. 20

8. (a) चार्पिट विधि का उपयोग करके आंशिक अवकल समीकरण $p = (z + qy)^2$ का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए।

Find a complete integral of the partial differential equation $p = (z + qy)^2$ by using Charpit's method. 15

(b) न्यूटन के पश्चांतर अंतर्वेशन सूत्र की व्युत्पत्ति कीजिए तथा त्रुटि-विश्लेषण भी कीजिए।

Derive Newton's backward difference interpolation formula and also do error analysis. 15

(c) दर्शाइए कि सम्मिश्र विभव $\tan^{-1} z$ के लिए धारा-रेखाएँ तथा समविभव वक्र, वृत्त हैं। किसी भी बिन्दु पर वेग निकालिए तथा $z = \pm i$ पर विचित्रता जाँचिए।

Show that for the complex potential $\tan^{-1} z$, the streamlines and equipotential curves are circles. Find the velocity at any point and check the singularities at $z = \pm i$. 20

★ ★ ★